Estratégia Militares

RESOLUÇÃO PROVA

MATEMÁTICA 2ª FASE

ITA 2021

Prof. Victor So

Sumário

RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA **3**

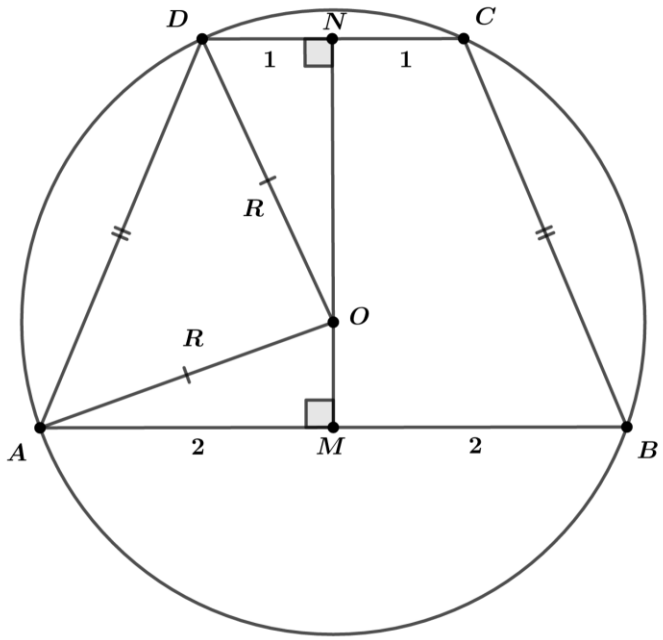
RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

1. (ITA/2021)

Determine o raio da circunferência circunscrita a um trapézio isósceles cujas bases e altura têm comprimentos 4, 2 e 3, respectivamente.

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Note que MN é altura do trapézio e O é o centro da circunferência circunscrita. Aplicando Pitágoras nos triângulos NOD e MOA, obtemos:

$$NO = \sqrt{R^2 - 1}$$

$$MO = \sqrt{R^2 - 4}$$

Logo:

$$NO + OM = MN \Rightarrow \sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 4} = 3$$

Elevando ao quadrado:

$$R^2 - 1 + R^2 - 4 + 2\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 9$$

$$2\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 14 - 2R^2$$

$$\sqrt{R^4 - 5R^2 + 4} = 7 - R^2$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$R^4 - 5R^2 + 4 = R^4 - 14R^2 + 49$$

$$9R^2 = 45 \Rightarrow R^2 = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

Gabarito: $R = \sqrt{5}$

---

2. (ITA/2021)

Determine todos os valores do número real a para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{-a} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{a^2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-a^2} \\ \boldsymbol{-a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{a^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

é não singular.

Comentários

Vamos calcular o determinante da matriz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & -a & 3 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 & a^3 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & -a^2 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a^2 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Da segunda coluna e da terceira linha, podemos colocar os fatores comuns a^2 e a em evidência, respectivamente. Logo:

$$D = a^2 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & -a & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a^3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a^2 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = a^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & -a & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a^3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a^2 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió:

$$D = a^3 \cdot \begin{vmatrix} 1-2a & 1+2a & a^3-6 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ a^2 & -a^2 & 3a & 3+2a \\ -a^3 & a^3 & -3-3a^2 & -2a^2 \end{vmatrix}$$

Fazendo $C_1 \to C_1 + C_2$:

$$D = a^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1+2a & a^3-6 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & -a^2 & 3a & 3+2a \\ 0 & a^3 & -3-3a^2 & -2a^2 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na primeira coluna:

$$D = a^3(2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ -a^2 & 3a & 3+2a \\ a^3 & -3-3a^2 & -2a^2 \end{vmatrix}$$

$$D = 2a^3[a^3(3+2a) - a^3(3+3a^2) + 3a^5 - 2a^4$$

$$D = 2a^6(3+2a-3-3a^2+3a^2-2a) = 2a^6(0) = 0$$

Portanto, a matriz é singular para qualquer a real. Logo, não existe valor de a real que torna a matriz não singular.

Gabarito: $\nexists a \in \mathbb{R}$ que torna a matriz não singular

---

3. (ITA/2021)

O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;

(b) o produto dos 7 primeiros termos.

Comentários

Temos a seguinte progressão geométrica de razão q:

$$(1, q, q^2, q^3, q^4, \dots)$$

A soma e produto dos n primeiros termos de uma PG é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1$$

$$P_n = a_1^n q^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

Do enunciado:

$$S_{79} = P_{13} \Rightarrow \frac{q^{79}-1}{q-1} = q^{\frac{13(12)}{2}} = q^{78}$$

$$q^{79} - 1 = q^{79} - q^{78}$$

$$q^{78} = 1 \therefore q = \pm 1 \Rightarrow q = -1$$

Portanto, a PG é $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

a) A soma é

$$S_{40} = \frac{(-1)^{40} - 1}{-1 - 1} \therefore S_{40} = 0$$

b) O produto é

$$P_7 = (-1)^{21} \therefore P_7 = -1$$

Gabarito: a) $S_{40} = 0$ **b)** $P_7 = -1$

---

4. (ITA/2021)

Determine todos os pontos (x, y) que pertencem à circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}$$

Comentários

Temos a equação da circunferência:

$$(x-5)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 \therefore x^2 - 10x + y^2 = 0 \ \ (I)$$

Vamos elevar a equação dada ao quadrado e depois testar as raízes para ver se satisfazem a equação.

$$3x - y - 4 = x^2 - 7x - 5y - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x = 4y \ \ (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \ ou \ y_2 = -4$$

Para $y_1 = 0$:

$$x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ ou \ x_2 = 10$$

Portanto, temos os pares $(0, 0)$ e $(10, 0)$.

Para $y_2 = -4$:

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \ ou \ x_4 = 8$$

Temos os pares $(2, -4)$ e $(8, -4)$.

Testando as raízes na equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}$$

$$(0, 0) \Rightarrow \sqrt{3(0) - 0 - 4} = \sqrt{0^2 - 7(0) - 5(0) - 4} \Rightarrow \sqrt{-4} = \sqrt{-4}$$

$$\Rightarrow convém\ nos\ complexos$$

$$(10,0) \Rightarrow \sqrt{3(10)-0-4} = \sqrt{10^2-7(10)-5(0)-4} \Rightarrow \sqrt{26} = \sqrt{26} \Rightarrow ok$$

$$(2,-4) \Rightarrow \sqrt{3(2)-(-4)-4} = \sqrt{2^2-7(2)-5(-4)-4} \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{6} \Rightarrow ok$$

$$(8,-4) \Rightarrow \sqrt{3(8)-(-4)-4} = \sqrt{8^2-7(8)-5(-4)-4} \Rightarrow \sqrt{24} = \sqrt{24} \Rightarrow ok$$

Assim, podemos concluir que

$$\mathbb{C} \Rightarrow S = \{(0;0),(10;0),(2;-4),(8;-4)\}$$

$$\mathbb{R} \Rightarrow S = \{(10;0),(2;-4),(8;-4)\}$$

Gabarito: $\mathbb{C} \Rightarrow S = \{(0;0),(10;0),(2;-4),(8;-4)\}$ $\mathbb{R} \Rightarrow S = \{(10;0),(2;-4),(8;-4)\}$

---

5. (ITA/2021)

Determine as raízes comuns aos polinômios:

$$\boldsymbol{p(x) = x^5 + x^4 - 8x^2 - 9x + 15} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10.}$$

Comentários

Perceba que 1 é raiz de p:

$$p(1) = 1^5 + 1^4 - 8(1)^2 - 9(1) + 15 = 17 - 17 = 0$$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini:

1	1	1	0	-8	-9	15
	1	2	2	-6	-15	0

Assim, temos $p(x) = (x-1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15)$.

Vamos aplicar a divisão euclidiana sucessivamente entre p e q para encontrar o máximo divisor comum desses polinômios. Dividindo o fator $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15$ de p por q:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -6x & -15 & 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10 \\ \cline{6-6} -x^4 & -2x^3 & -\frac{13}{3}x^2 & +\frac{4}{3}x & +\frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ \cline{1-5} & & -\frac{7x^2}{3} & -\frac{14}{3}x & -\frac{35}{3} & \end{array}$$

Agora, vamos dividir o divisor pelo polinômio resto encontrado. Veja que o resto é

$$r(x) = -\frac{7}{3}(x^2 + 2x + 5)$$

Podemos usar apenas $x^2 + 2x + 5$ para simplificar as contas, logo:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +6x^3 & +13x^2 & -4x & -10 & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & -6x^3 & -15x^2 & & & 3x^2 - 2 \\ \cline{1-3}
 & & -2x^2 & -4x & -10 & \\
 & & 2x^2 & +4x & +10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & & \\
\end{array}$$

Encontramos um resto nulo, logo podemos afirmar que o máximo divisor comum entre p e q é o divisor da última divisão: $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Assim, as raízes comuns são dadas por:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Raízes:

$$x = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$$

Gabarito: $\boldsymbol{x_1 = -1 - 2i; x_2 = -1 + 2i}$

---

6. (ITA/2021)

Considere $z = a(\sqrt{3} + i) \in \mathbb{C}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Determine todos os números reais a para os quais z^7 e z^{13} estão à mesma distância de z no plano complexo.

Comentários

Queremos $|z^7 - z| = |z^{13} - z|$, logo:

$$|z(z^6 - 1)| = |z(z^{12} - 1)| = |z(z^6 - 1)(z^6 + 1)|$$

$$|z||z^6 - 1| = |z||z^6 - 1||z^6 + 1|$$

$$|z||z^6 - 1|(1 - |z^6 + 1|) = 0$$

As possibilidades são:

$$(i)\ |z| = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$(ii)\ |z^6 - 1| = 0$$

$$(iii)\ |z^6 + 1| = 1$$

Vamos escrever $z = a(\sqrt{3} + i)$ na forma polar:

$$z = 2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2a\, cis(30°)$$

$$z^6 = 2^6 a^6 cis(180°) = -2^6 a^6$$

Substituindo na equação:

$$|-2^6 a^6 - 1| = 0$$

Como $a \in \mathbb{R}$, temos que não existe a que satisfaz a equação acima.

Analisando a última equação:

$$|-2^6 a^6 + 1| = 1 \Rightarrow -2^6 a^6 + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} -2^6 a^6 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ -2^6 a^6 = -2 \Rightarrow a^6 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Portanto, temos $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Gabarito: $a \in \{-1, 0, 1\}$

---

7. (ITA/2021)

Um relógio digital mostra o horário no formato $H : M : S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H, M, S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

Comentários

Como a progressão aritmética deve ter razão estritamente positivo, devemos ter $r > 0$. As progressões são da forma:

$$(H, M, S) = (H, H + r, H + 2r), com\ r \in \mathbb{N}$$

Veja que para cada hora, devemos analisar a quantidade de progressões que podemos ter. Observe o caso para $H = 1$:

$$\{(1, 2, 3); (1, 3, 4); (1, 4, 7); (1, 5, 9); \dots; (1, 30, 59)\} \Rightarrow total = 29\ casos$$

Note que em cada progressão para $H = 1$ a razão aumenta 1 unidade. Assim, podemos contar da seguinte forma: a primeira razão será $r = 1$ e a última será dada por:

$$H + 2r \leq 59 \Rightarrow r \leq \frac{59 - H}{2}$$

$$H = 1 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 1}{2} = 29 \Rightarrow r_{max} = 29 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 29 \Rightarrow 29\ casos$$

$$H = 2 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-2}{2} = \frac{57}{2} \Rightarrow r_{max} = 28 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28 \Rightarrow 28\ casos$$

$$H = 3 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-3}{2} = 28 \Rightarrow r_{max} = 28 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28 \Rightarrow 28\ casos$$

$$H = 4 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-4}{2} = \frac{55}{2} \Rightarrow r_{max} = 27 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27 \Rightarrow 27\ casos$$

$$H = 5 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-5}{2} = 27 \Rightarrow r_{max} = 27 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27 \Rightarrow 27\ casos$$

$$H = 6 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-6}{2} = \frac{53}{2} \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$

$$H = 7 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-7}{2} = 26 \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$

$$H = 8 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-8}{2} = \frac{51}{2} \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$

$$H = 9 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-9}{2} = 25 \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$

$$H = 10 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-10}{2} = \frac{49}{2} \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$

$$H = 11 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-11}{2} = 24 \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$

$$H = 12 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-12}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow r_{max} = 23 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 23 \Rightarrow 23\ casos$$

Somando os casos, encontramos:

$$n = 29 + 2(28 + 27 + 26 + 25 + 24) + 23 = 52 + 2 \cdot \frac{(28+24)5}{2} = 52 \cdot 6 = 312$$

Como queremos a quantidade em 1 dia, devemos considerar AM e PM, ou seja, devemos multiplicar o valor encontrado por 2:

$$n_T = 624$$

Gabarito: $n_T = 624$

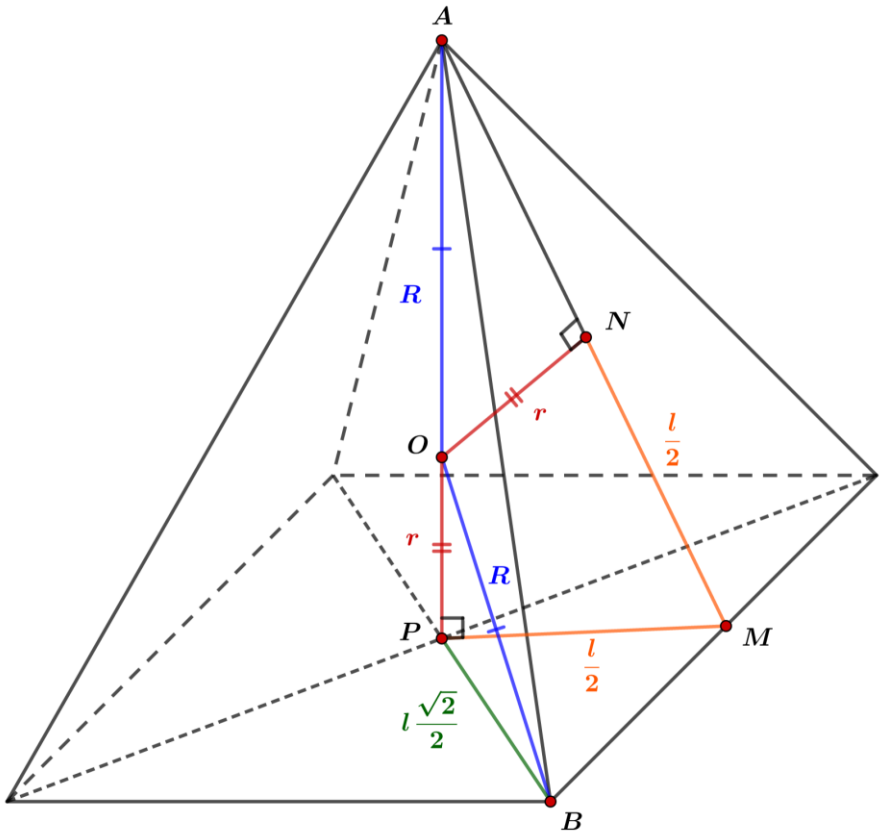
---

8. (ITA/2021)

Seja P uma pirâmide regular com base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a P coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a P.

Comentários

Sejam r e R os raios das esferas inscrita e circunscrita à pirâmide, respectivamente. Assim, temos a seguinte figura:



Note que $PM = l/2$ é metade do lado do quadrado de lado l e $PB = l\sqrt{2}/2$ é metade da diagonal do quadrado. Além disso, temos que MN e PM são segmentos de retas tangentes à esfera inscrita, logo $MN = PM$.

Queremos calcular a razão entre as áreas das esferas:

$$\frac{A_{circunscrita}}{A_{inscrita}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Por semelhança de triângulos retângulos $\Delta AON \sim \Delta AMP$, temos:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{R}{AM} = \frac{r}{\frac{l}{2}} \Rightarrow AM = \left(\frac{R}{r}\right) \cdot \frac{l}{2}$$

$$\frac{AN}{AP} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{AM - MN}{AP} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{\left(\frac{R}{r}\right) \cdot \frac{l}{2} - \frac{l}{2}}{R + r} = \frac{r}{\left(\frac{l}{2}\right)} \Rightarrow \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{r} - 1\right) = r(R + r)$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{4r^2(R + r)}{R - r}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔOPB:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{l^2}{2}$$

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2(R+r)}{R-r}$$

$$R^2 - r^2 = \frac{2r^2(R+r)}{R-r}$$

Dividindo a equação por r^2 e reescrevendo-a em função de R/r, obtemos:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1 = \frac{2\left(\left(\frac{R}{r}\right)+1\right)}{\left(\frac{R}{r}\right)-1}$$

Fazendo $k = R/r$:

$$k^2 - 1 = \frac{2(k+1)}{k-1}$$

$$(k-1)(k+1) = \frac{2(k+1)}{k-1}$$

Como $k > 0$, temos:

$$k - 1 = \frac{2}{k-1} \Rightarrow (k-1)^2 = 2 \Rightarrow k - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$k > 0 \Rightarrow k = 1 + \sqrt{2}$$

Queremos

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = k^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Gabarito: $3 + 2\sqrt{2}$

---

9. (ITA/2021)

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = -3\pi$, $sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma = 1/2$ e $cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma = -1/2$. Determine o valor de $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$.

Comentários

Usando as equações e elevando ao quadrado:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma) = \frac{1}{4} \quad (I)$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma + 2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma) = \frac{1}{4} \quad (II)$$

Usando a relação fundamental em (II):

$$(1-\cos^2\alpha) + (1-\cos^2\beta) + (1-\cos^2\gamma) + 2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma) = \frac{1}{4} \quad (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2\gamma - 3 + 2\left(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + \underbrace{\cos\alpha\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}_{\cos(\alpha+\gamma)} + \underbrace{\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}_{\cos(\beta+\gamma)}\right) = 0$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\beta+\gamma)) = 0$$

Usando a relação $\alpha + \beta + \gamma = -3\pi$, obtemos:

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2(\cos(-3\pi-\gamma) + \cos(-3\pi-\beta) + \cos(-3\pi-\alpha)) = 0$$

Como cosseno é função par:

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2(\cos(3\pi+\gamma) + \cos(3\pi+\beta) + \cos(3\pi+\alpha)) = 0$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2(\cos(\pi+\gamma) + \cos(\pi+\beta) + \cos(\pi+\alpha)) = 0$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2\underbrace{(-\cos\gamma - \cos\beta - \cos\alpha)}_{-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 0$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Gabarito: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

---

10. (ITA/2021)

Uma moeda é lançada sucessivas vezes até que se tenha a ocorrência de 2 caras. Qual a probabilidade do número total de lançamentos ser par?

Comentários

Seja P_n a probabilidade de dar a segunda cara no n-ésimo lançamento. Assim, temos que ter apenas 1 lançamento cara nos $n-1$ lançamentos anteriores. Vamos fazer as seguintes definições:

P_1 – probabilidade de dar exatamente 1 cara nos primeiros $n-1$ lançamentos

P_2 – probabilidade de dar 1 cara no n-ésimo lançamento

Para calcular P_1, temos que escolher 1 moeda dos $n-1$ lançamentos para dar a cara e multiplicar pela probabilidade de dar cara que é $1/2$. Além disso, temos que multiplicar pela probabilidade de ocorrer $n-2$ coroas nesses lançamentos, essa probabilidade é dada por $\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n-2\ vezes}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

logo:

$$P_1=\binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

A probabilidade de dar cara no n-ésimo lançamento é

$$P_2=\frac{1}{2}$$

Assim, P_n é dado por:

$$P_n=P_1\cdot P_2=\binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)=(n-1)\cdot\frac{1}{2^n}$$

A probabilidade total é dada por:

$$P=P_2+P_4+P_6+P_8+\cdots$$

$$P=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^6}+\frac{7}{2^8}+\cdots$$

Essa é a soma de uma progressão aritmética geométrica. Sua razão geométrica é $1/2^2$. Multiplicando P por essa razão e depois subtraindo de P, obtemos:

$$\frac{P}{2^2}=\frac{1}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\frac{5}{2^8}+\frac{7}{2^{10}}+\cdots$$

$$P-\frac{P}{4}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^4}+\frac{2}{2^6}+\frac{2}{2^8}+\cdots$$

$$\frac{3P}{4} = \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots}_{soma\ de\ uma\ PG\ infinita\ de\ razão \frac{1}{2^2}}$$

$$\frac{3P}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore P = \frac{5}{9}$$

Gabarito: $P = \frac{5}{9}$